Méthode de la phase stationnaire

Leçon : 224, 239, 250

Réf : Queffélec-Zuily

⚠ au choix de la convent° pour $\hat{f}$.

/Théorème

Soit $a \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$, avec $a(0) \neq 0$. Alors

$$\int_{\mathbb{R}} e^{itx^2} a(x)\,dx \underset{t \to +\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{t}}\, e^{i\pi/4} a(0).$$

Commentaires

- Résultat intermédiaire permettant d'étudier $\int_{\mathbb{R}} e^{it\varphi(x)} a(x)\,dx$.
- Existe en multi-D.
- Phase stationnaire : $(x^2)'(0) = 0$. Cas général : $\begin{cases} x_0 \in \operatorname{Supp} a \\ \varphi'(x_0) = 0 \\ \varphi''(x_0) \neq 0. \end{cases}$

Preuve But : écrire un développement limité.

Idée : passer par Fourier et l'identité de Plancherel.

On note $G(\lambda) = \int_{\mathbb{R}} e^{i\lambda x^2} \overline{b(x)}\,dx$, où $b \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$.

Pb : $x \mapsto e^{i\lambda x^2} \notin L^2$.

Soit $\varepsilon > 0$, on pose $G_\varepsilon(\lambda) = \int_{\mathbb{R}} \underbrace{e^{-\varepsilon x^2 + i\lambda x^2}}_{:= \varphi_\varepsilon(x)} \overline{b(x)}\,dx$.

- $\varphi_\varepsilon(x)\overline{b(x)} \underset{\varepsilon \to 0}{\to} e^{i\lambda x^2} \overline{b(x)} \in L^1_x(\mathbb{R})$
- $\forall x \in \mathbb{R} \quad |\varphi_\varepsilon(x) \overline{b(x)}| \leq |\overline{b(x)}| \in L^1_x(\mathbb{R})$.

Par le TCVD : $G_\varepsilon(\lambda) \to G(\lambda)$ $[\varepsilon \to 0^+]$.

On a par Plancherel :

$$G_\varepsilon(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_\varepsilon(x)\,\overline{b(x)}\,dx$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{\varphi}_\varepsilon(\xi)\,\overline{\hat{b}}(\xi)\,d\xi \quad (\triangle \text{ choix convent}^{\circ}\text{, où } \hat{f}(\xi) = \int f(x) e^{-ix\xi}\,dx)$$

Or $\hat{\varphi}_\varepsilon(\xi) = \left(x \mapsto e^{-(\varepsilon - i\lambda)x^2}\right)^{\wedge}(\xi)$

$$= \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\varepsilon - i\lambda}}\, e^{-\xi^2/4(\varepsilon - i\lambda)} \quad \text{(figure dans le plan)}$$

$(\mathrm{Re}(\varepsilon - i\lambda) = \varepsilon > 0)$

Ainsi $G_\varepsilon(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \times \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\varepsilon - i\lambda}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\xi^2}{4(\varepsilon - i\lambda)}}\,\overline{\hat{b}}(\xi)\,d\xi$

$$= \frac{1}{2\sqrt{\pi}\sqrt{\varepsilon - i\lambda}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\xi^2/4(\varepsilon - i\lambda)}\,\overline{\hat{b}}(\xi)\,d\xi.$$

On applique de nouveau le TCVD :

- $\lim_{\varepsilon \to 0} e^{-\xi^2/4(\varepsilon - i\lambda)}\,\overline{\hat{b}}(\xi) = e^{-i\xi^2/4\lambda}\,\overline{\hat{b}}(\xi) \in L^1_\xi(\mathbb{R})$
- $\left|e^{-\frac{\xi^2}{4(\varepsilon - i\lambda)}}\,\overline{\hat{b}}(\xi)\right| = |\hat{b}(\xi)|\,\left|e^{-\frac{\xi^2(\varepsilon + i\lambda)}{4(\varepsilon^2 + \lambda^2)}}\right|$

$$= |\hat{b}(\xi)| \cdot \underbrace{e^{-\xi^2\varepsilon/4(\varepsilon^2 + \lambda^2)}}_{\leq 1}$$

$$\leq |\hat{b}(\xi)|.$$

et de plus :

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \sqrt{\varepsilon - i\lambda} = \begin{cases} e^{i\pi/4}\sqrt{|\lambda|} & \text{si } \lambda < 0 \\ e^{-i\pi/4}\sqrt{\lambda} & \text{si } \lambda > 0 \end{cases} = e^{\operatorname{sgn}(\lambda)\, i\pi/4}\sqrt{|\lambda|}.$$

En effet:

Si $\delta^2 = \varepsilon - i\lambda$, $\operatorname{Re}(\delta) > 0$.

On écrit $\delta = a + ib$, $a > 0$, $\delta^2 = a^2 - b^2 + i2ab$

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = \sqrt{\varepsilon^2 + \lambda^2} \\ a^2 - b^2 = \varepsilon \\ 2ab = -\lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a^2 = \varepsilon + \sqrt{\varepsilon^2 + \lambda^2} \\ 2ab = -\lambda \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = +\left(\frac{\varepsilon}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\varepsilon^2 + \lambda^2}\right)^{1/2} \\ b = \frac{-\lambda}{2a} \end{cases}$$

$$\begin{cases} a \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} \left(\frac{|\lambda|}{2}\right)^{1/2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{|\lambda|} \\ b \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{|\lambda|}} \times \cancel{2} \times \frac{-\lambda}{2} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\lambda}{\sqrt{|\lambda|}} \end{cases}$$

Si $\lambda > 0$: $\delta_0 = a_0 + ib_0 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\sqrt{\lambda} = e^{-i\pi/4}\sqrt{\lambda}$

Si $\lambda < 0$: $\delta_0 = a_0 + ib_0 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\sqrt{|\lambda|} = e^{i\pi/4}\sqrt{|\lambda|}$

(pas besoin de détailler)

On écrit donc: $\sqrt{-i\lambda} = \begin{cases} \sqrt{i}\sqrt{-\lambda} = e^{i\pi/4}\sqrt{|\lambda|} & \text{si } \lambda < 0 \\ \sqrt{-i}\sqrt{\lambda} = e^{-i\pi/4}\sqrt{\lambda} & \text{si } \lambda > 0. \end{cases}$

Donc $G(\lambda) = \lim_{\varepsilon \to 0} G_\varepsilon(\lambda) = \frac{1}{2\sqrt{\pi|\lambda|}} e^{\operatorname{sgn}(\lambda) i\pi/4} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{i\xi^2}{4\lambda}} \bar{\hat{b}}(\xi)\, d\xi$

et si $\lambda > 0$: $G(\lambda) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\lambda}} e^{i\pi/4} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{-i\xi^2}{4\lambda}} \bar{\hat{b}}(\xi)\, d\xi$.

On fait un DL de $y \mapsto e^{iy}$.

On a $\begin{cases} e^{iy} = \sum_{n=0}^{N} \frac{(iy)^n}{n!} + A_N(y) \text{ avec} \\ |A_N(y)| = \left| \int_0^y \frac{(y-t)^N}{n!} (e^{iy})^{(N+1)}(t)\, dt \right| \end{cases}$

$$= \left| \int_0^y \frac{(y-t)^N}{N!} i^{N+1} e^{it} dt \right|$$

$$\leq \frac{|y|^{N+1}}{(N+1)!}$$

Donc,

$$G(\lambda) = \frac{e^{i\pi/4}}{2\sqrt{\pi\lambda}} \sum_{n=0}^{N} \frac{(-i)^n}{4^n \lambda^n n!} \int_{-\infty}^{+\infty} \xi^{2n} \hat{\bar{b}}(\xi)\, d\xi + R_N(\lambda)$$

où $|R_N(\lambda)| = \left| \frac{e^{i\pi/4}}{2\sqrt{\pi\lambda}} \int_{-\infty}^{+\infty} A_N\left(\frac{-\xi^2}{4\lambda}\right) \hat{\bar{b}}(\xi)\, d\xi \right|$

$$\lesssim_N \lambda^{-1/2} \lambda^{-N-1} = \lambda^{-N-3/2}.$$

$b \in \mathcal{C}_c^\infty \subset \mathcal{S} \to$ décroissance rapide, on peut donc appliquer l'inversion de Fourier : $\bar{b}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi} \hat{\bar{b}}(\xi)\, d\xi$.

et par dérivat° sous l'intégrale :

$$\bar{b}^{(2n)}(0) = \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} (-i\xi)^{2n} e^{-ix\xi} \hat{\bar{b}}(\xi)\, d\xi \right](x=0)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} (-i\xi)^{2n} \hat{\bar{b}}(\xi)\, d\xi$$

Donc

$$G(\lambda) - R_N(\lambda) = \frac{e^{i\pi/4}}{2\sqrt{\pi\lambda}} \sum_{m=0}^{N} \frac{(-i)^m}{4^m \lambda^m m!} (-i)^{-2m} \times 2\pi \, \bar{b}^{(2m)}(0)$$

$$= \frac{e^{i\pi/4}}{\sqrt{\lambda}} \sqrt{\pi} \sum_{m=0}^{N} \frac{i^m}{4^m m!} \lambda^{-m} \, \bar{b}^{(2m)}(0).$$

En particulier, pour $a = \bar{b}$, on a

$$G(\lambda) \underset{\lambda \to +\infty}{\sim} \frac{e^{i\pi/4}}{\sqrt{\lambda}} \sqrt{\pi} \, a(0).$$

$\square$

Pour aller ⊕ vite : - mieux détailler les TCVD

- introduire des constantes, $\alpha = \frac{e^{i\pi/4}}{2\sqrt{\pi}}$

- supposer direct que $\lambda > 0$.

Complément

I- Cas général

Soit $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$, $a \in \mathcal{C}_c^\infty$, tel que sur le support de a, il existe un unique point x_0 tel que

$$\varphi'(x_0) = 0, \quad \varphi''(x_0) \neq 0$$

Si $\varphi'(x) \neq 0$, sur le support de a, alors via des IPP,

$$|F(t)| \lesssim_N t^{-N}, \ t \geq 1.$$

$$F(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{it\varphi(x)} a(x)\, dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \frac{(e^{it\varphi})'(x)}{it\varphi(x)} a(x)\, dx$$

$$= -\frac{1}{it} \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{a}{\varphi'}\right)'(x)\, e^{it\varphi(x)}\, dx$$

$$= -\frac{1}{it} \int_{\mathbb{R}} e^{it\varphi(x)} a_1(x)\, dx \ \text{etc.}$$

On a $F(t) = e^{it\varphi(x_0)} \sum_{m=0}^{N} A_m t^{-m-1/2} + R_N(t)$, $t \geq 1$

où $\begin{cases} A_0 = \dfrac{\sqrt{2\pi}\, e^{i\varepsilon\pi/4}}{\sqrt{|\varphi''(x_0)|}}\, a(x_0), \quad \varepsilon = \text{signe } \varphi''(x_0) \\ |R_N(t)| \leq C_N t^{-N-3/2}, \ t \geq 1 \end{cases}$

→ devient la signature de la Hessienne en dim ≥ 2.

On sait $\varphi(x) = \varphi(x_0) + \frac{1}{2}(x-x_0)^2 \cancel{\varphi}\, \underline{\psi}(x)$.

$\in \mathcal{C}^\infty$; $\psi(x_0) = \varphi''(x_0)$.

$$F(t) \underset{y = x - x_0}{=} e^{it\varphi(x_0)} \int_{\mathbb{R}} e^{it y^2 a(y)} c(y)\, dy$$

où $\begin{cases} a(y) = \frac{1}{2}\psi(y+x_0) \\ c(y) = a(y+x_0). \end{cases}$

On veut faire le chgt de variable $\eta = \sqrt{\pm a(y)}\, y$

→ c'est local autour de 0, car $a(0) = \frac{1}{2}\varphi''(x_0) \neq 0$

ensuite c'est calculatoire. (et chiant).

II - Applications

On peut mq $Ai(t) \underset{t\to-\infty}{=} 2\sqrt{\pi}\, |t|^{-1/4} \cos\left(\frac{2}{3}|t|^{3/2} - \pi/4\right) + O(|t|^{-7/4})$.